**Лабораторна робота 2.**

**Розв’язання задач лінійного програмування симплекс-методом**

**Мета роботи:** навчитись застосовувати симплекс-метод для вирішення оптимізаційних задач.

**Завдання роботи:** Визначити максимально ефективний розв’язок за відповідних умов обмежень

**Симплекс-метод** – це поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого.

Задачі лінійного програмування є найпростішими серед задач умовної оптимізації і мають місце тоді, коли і цільова функція, і обмеження є лінійними функціями відносно множини параметрів оптимізації. Особливістю задач названого типу є те, що цільова функція, без врахування обмежень, немає екстремумів, а значить не може виродитись у задачу безумовної оптимізації. З іншого боку, задачі лінійного програмування складають більше половини усіх реальних задач оптимізації, особливо це відноситься до планово-організаційних та економічних задач.

**Постановка задачі лінійного програмування в стандартній формі**

Загальну задачу лінійного програмування можна поставити таким чином: Знайти невід'ємні значення змінних u1, u2, ... un, які задовольняли б умовам-рівностям



або умовам - нерівностям (завжди ≤ ) (2.1)



та надавали максимальне значення лінійній функції цих змінних - цільовій функції:

L(x) = c1 x1 + ... + cn xn -> mах(2.2)

В задачі (2.1)–(2.2) будемо називати

* матрицю A = ||aij||, i=1,...,m, j=1,...,n, **матрицею умов**;
* вектор-стовпець Aj = (a1j,...,amj)т, j=1,...,n, — **j-м вектором умов**;
* вектор A0 = (a10 ,...,am0 )т — **вектором обмежень**.
* вектор x = (x1,...,xn) називається **допустимим розв'язком** задачі лінійного програмування (ЗЛП), якщо його компоненти задовольняють обмеження (2.2)–(2.3).
* ненульовий допустимий розв'язок x — **базисний** (ДБР), якщо його додатним компонентам xj відповідають лінійно незалежні вектори умов Aj . (Нульовий допустимий розв'язок будемо завжди вважати базисним).
* система m лінійно незалежних векторів умов, що включає вказані вектори Aj , називається **базисом**.
* вектори базису утворюють **базисну *матрицю*.**

**Симплекс-метод:**

При формулюванні конкретної задачі дотримуються обмежень одного типу, а вибір обмежень у вигляді рівностей або нерівностей пов'язаний з різними канонічними формами запису задачі. Оскільки між ними перехід відбувається досить легко, у визначенні вказують обидва випадки. Для розв'язання задач лінійного програмування розроблено ряд алгоритмів, серед яких найбільш ефективним вважається симплекс-метод. Симплекс-метод пов’язаний з вибором початкового допустимого базису, та покрокового переходу до допустимих базисів, що забезпечують більш оптимальне значення функції.

ЗЛП — **канонічна (КЗЛП)**, якщо її обмеження (2.1) мають канонічну форму:

xi + ai,m+1 xm+1 + ... + ain xn = ai0 , ai0 ≥0, i=1,...,m,

тобто, матриця умов A = ||aij||, i=1,...,m, j=1,...,n, містить в собі одиничну пiдматрицю розміру m×m i вектор обмежень A0 = (a10 ,...,am0 )т — невід'ємний.

КЗЛП елементарно визначає такі основні в лінійному програмуванні конструкції:

* деякий ДБР — x(0)=(a10 ,...,am0 ,0,...,0)т;
* його базис — m-вимiрнi одиничні вектори (1,0,...,0)т, (0,1,...,0)т,..., (0,...,0,1)т;
* його базисну матрицю B — одиничну матрицю розміру m×m;
* базисні змінні — x1,...,xm.

Стандартна ЗЛП (2.1)–(2.2) зводиться в загальному випадку до канонічної ЗЛП додаванням штучних невід'ємних змінних до лівих частин обмежень (2.1) i введенням цих же змінних з досить великим коефіцієнтом М > 0 до цільової функції (2.2) (М-метод).

М-задача має вигляд:



**Покроковий** алгоритм симплекс-методу може бути записаний як:

Крок 1. Вибираємо m змінних, які задають допустимий пробний розв'язок. Виключаємо ці змінні з виразу для цільової функції.

Крок 2. Перевіряємо, чи є можливість за рахунок однієї зі змінних, які мали спочатку нульові значення, покращити значення цільової функції, надаючи відповідній змінній відмінні від нуля (причому позитивні) значення. Якщо це можливо - переходимо до кроку 3. В іншому випадку припиняємо обчислення і вважаємо, що максимуму цільової функції досягнуто.

Крок 3. Знаходимо граничне значення змінної, за рахунок якої можна покращити значення цільової функції. Збільшення значення цієї змінної допускається до тих пір, поки одна з m змінних, відмінних раніше від нуля, не перетвориться в 0. Виключимо з виразу для цільової функції цю змінну, і введемо в пробний розв'язок ту змінну, за рахунок якої результат можна покращити .

Крок 4. Розв'язати систему m рівнянь відносно змінних, що складають поточний пробний розв'язок. Виключити ці змінні з виразу цільової функції. Повернутися до кроку 2.

Для виконання кроку 2 застосовують симплекс-критерій 1, який у випадку пошуку максимуму має вигляд:

Якщо в рядку /0/ (цільової функції) є небазисні змінні, коефіцієнти при яких від'ємні, потрібно вибрати змінну (xj) з найбільшим абсолютним значенням від'ємного коефіцієнта, - ту змінну, яка забезпечує найбільший питомий приріст значення цільової функції. У випадку, коли усі небазисні змінні в рядку /0/ позитивні або нульові, оптимальний розв'язок можна вважати знайденим.

При виконанні кроку 3, використовується симплекс-критерій 2, що має вигляд:

Розглядаються відношення чисел, які стоять в правих частинах рівнянь-обмежень до відповідних коефіцієнтів при новій базисній змінній (не приймаючи до уваги відношення, в яких знаменник дорівнює нулю чи являє собою від'ємне число). Вибирається відношення з найменшим значенням.

Докладний приклад симплекс-методу наведено в «[Приклад симплекс методу](https://drive.google.com/file/d/1BtqNmiL7yvnRM_f92La9DJLgE1Bh36ci/view?usp=sharing)».

Приклади приведення задачі лінійного програмування до виду зручного для розв’язання симплекс-методом можна знайти [тут](https://drive.google.com/file/d/1EwwgSgs2YyJJkEd65wyElRFraxK_pTES/view?usp=sharing).

**Рекомендації з розрахунків**

Симплекс-метод порівняно просто реалізується як в електронних таблицях так і шляхом створення програми мовою високого рівня. При реалізації в середовищі електронних таблиць, доцільно створити шаблон-таблицю для усіх рядків симплекс-таблиці, та пере обчислювати його від ітерації до ітерації.

**Завдання на лабораторну роботу**

Використовуючи симплекс-метод, знайти максимум/мінімум лінійної функції при наявності лінійних обмежень за [варіантами](https://drive.google.com/file/d/1YaOUM4trkYGhN_wGPGWxgaXU5adu9vr5/view?usp=sharing). Номер варіанту обирається за порядковим номером студента у списку групи. У випадку, якщо студентів в групі більше ніж варіантів, то останні з списком студенти обирають початкові варіанти.

Якщо у групі 22 студенти, а варіантів - 20. Тоді 21-ий студент обирає перший варіант, 22-ий – другий.